Bulletin de la Sabix
Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de l'École polytechnique

44 | 2009
Gabriel Lamé (1795-1870) : Les pérégrinations d'un ingénieur au XIX^e siècle

Théorie de l'élasticité et philosophie naturelle

Rossana Tazzioli

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/sabix/630
ISSN : 2114-2130

Éditeur
Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée
Date de publication : 1 octobre 2009
Pagination : 64 - 71
ISBN : ISSN N° 2114-2130
ISSN : 0989-30-59

Référence électronique
Rossana Tazzioli, « Théorie de l'élasticité et philosophie naturelle », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 44 | 2009, mis en ligne le 21 mai 2011, consulté le 02 mai 2019. URL : http://journals.openedition.org/sabix/630

Théorie de l'élasticité et philosophie naturelle

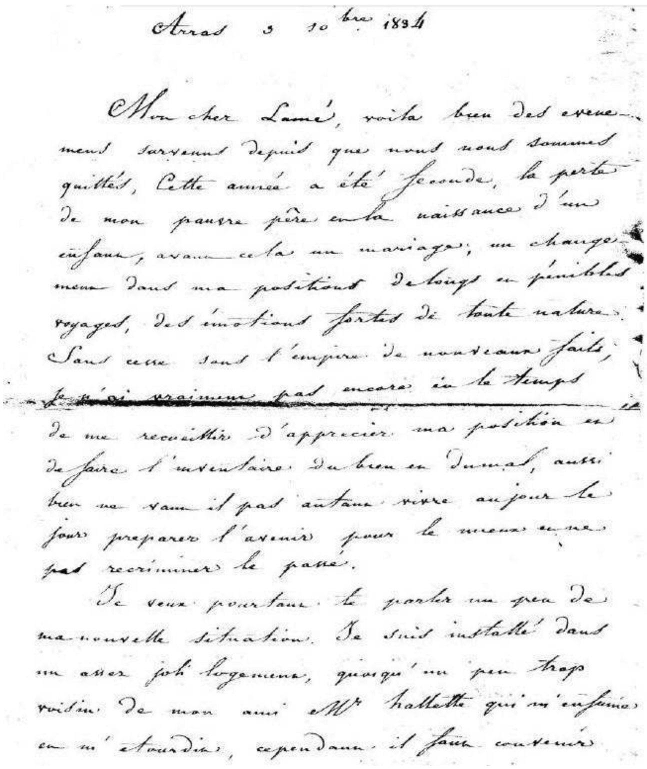
Rossana Tazzioli

Introduction

1 La vie de Gabriel Lamé, son rapport d'amitié et de travail avec Benoît Pierre Émile Clapeyron, ont été analysés par plusieurs conférenciers. En particulier, l'expérience de Lamé et Clapeyron comme ingénieurs en Russie de 1820 à 1831 a été décisive pour toute l'activité scientifique de Lamé concernant les mathématiques pures et les sciences appliquées. En effet, Lamé a donné des contributions remarquables à la science du bâtiment (stabilité des voûtes et résistance des matériaux), aux mathématiques (théorie des nombres, probabilité, géométrie, théorie des courbes et des surfaces, analyse), à la physique et à la physique mathématique (théorie de l'élasticité, théorie de la chaleur, mécanique, thermodynamique, optique, électricité, cristallographie) et il a publié des traités sur ces diverses sujets de recherche (physique, coordonnées curvilignes, théorie de l'élasticité, théorie de la chaleur, théorie des fonctions elliptiques, mécanique rationnelle).

Portrait de B.E. Clapeyron

Lettre de Clapeyron à Lamé, 3 décembre 1834



Arras 3 10bre 1834

Mon cher Lamé, voila bien des evenemens survenus depuis que nous nous sommes quittés, Cette année a été feconde, la perte de mon pauvre père en la naissance d'un enfant, avant cela un mariage, un changement dans ma position de longs et pénibles voyages, des émotions fortes de toute nature. Sans cesse sous l'empire de nouveaux faits, je n'ai vraiment pas encore eu le temps de me recueillir d'apprecier ma position et de faire l'inventaire du bien et du mal, aussi bien ne vaut il pas autant vivre au jour le jour preparer l'avenir pour le mieux et ne pas recriminer le passé.

Je veux pourtant te parler un peu de ma nouvelle situation. Je suis installé dans un assez joli logement, quoiqu'un peu trop voisin de mon ami Mr hallette qui m'enfume et m'etourdit, cependant il faut convenir

2 Pour ce qui concerne la théorie de l'élasticité et les liens avec la science du bâtiment, Lamé écrivait dans *l'Analyse des travaux de M. Lamé, par lui-même :*

> Constamment préoccupés par l'idée d'aider au perfectionnement de la science de l'ingénieur, nous avons été conduits, M. Clapeyron et moi, à étudier l'équilibre intérieur des corps solides élastiques. Nous pensons encore que cette question, malheureusement fort difficile, et encore peu avancée, est la plus importante que les ingénieurs qui s'occupent de sciences théoriques puissent se proposer. Nos premiers travaux sur ce sujet nous conduisirent aux équations de l'équilibre de l'élasticité dans un milieu solide et homogène, aux lois régissant les pressions et les tractions autour de chaque point intérieur, et à l'intégration des équations primitives dans quelques cas simples[1].

3 Lamé et Clapeyron, en effet, ont rédigé leur célèbre mémoire sur la théorie mathématique de l'élasticité pendant leur séjour en Russie[2] ; ce n'est pas par hasard si ce mémoire contient une importante partie dédiée aux applications de la théorie de l'élasticité, qui intéressent les ingénieurs plutôt que les mathématiciens.

4 Cependant la science du bâtiment n'est pas la seule motivation qui conduit Lamé à s'intéresser à la théorie de l'élasticité. Comme plusieurs savants de son époque, Lamé pense qu'un fluide éthéré remplit l'univers et qu'il est responsable de la propagation des forces physiques dans l'espace. Puisque l'éther est un fluide supposé élastique, homogène et isotrope, ses vibrations peuvent être étudiées en utilisant les principes de la théorie de l'élasticité. Cette idée, qui appartient à la « philosophie naturelle » plutôt qu'aux sciences mathématiques, joue un rôle très important dans l'activité de recherche de Lamé. « Ce fluide [l'éther] doit nécessairement jouer un grand rôle dans les phénomènes de la chaleur, de l'électricité et du magnétisme, dans ceux qui dépendent de la constitution interne et du changement d'état des corps, enfin dans les combinaisons chimiques », indiquait Lamé dans un mémoire dédié à l'étude de l'équilibre de l'éther[3].

5 De nombreux savants ont tenu l'éther comme élément unificateur des théories physiques, de la Grèce antique jusqu'à la fin du XIXe siècle. Au début du XXe siècle la théorie de la relativité a rejeté le concept d'éther, mais plusieurs savants - dont Einstein - ont essayé et essaient encore de trouver une théorie capable d'unifier les diverses forces physiques. L'attitude de Lamé est bien exprimée par Joseph Bertrand : « Aux yeux de Lamé, la science était une, et les rapprochements, même dans les seules formules entre des théories encore distinctes étaient l'indice certain d'une doctrine plus générale qui doit un jour les embrasser toutes. La distinction entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées était, à ses yeux, dangereuse et fausse[4] ».

6 La théorie de l'élasticité revêt une grande importance dans ce contexte : elle est la théorie au sein de laquelle peuvent être exprimées les vibrations (transversales ou longitudinales) de l'éther responsable des diverses forces physiques : lumière, chaleur, électricité, magnétisme et force de gravité pourraient être unifiées dans le même cadre théorique.

> L'élasticité est donc une des propriétés générales de la matière. Elle est, en effet, l'origine réelle ou l'intermédiaire indispensable des phénomènes physiques les plus importants de l'univers. C'est par elle que la lumière se répand, que la chaleur rayonne, que le son se forme, se propage et se perçoit, que notre corps agit et se déplace, que nos machines se meuvent, travaillent et se conservent, que nos constructions, nos instruments échappent à mille causes de destruction. En un mot, le rôle de l'élasticité dans la nature, est au moins aussi important que celui de la pesanteur universelle[5].

7 En outre, la théorie de l'élasticité a conduit Lamé à introduire des nouveaux outils théoriques, comme les coordonnées curvilignes ou les paramètres différentiels, qui ont montré leur efficacité dans les mathématiques du XIX^{e} siècle.

Les contributions à la théorie de l'élasticité

8 Le célèbre mémoire de Lamé et Clapeyron sur la théorie de l'élasticité a été rédigé en 1828, pendant leur séjour en Russie, et publié en 1833 dans les mémoires de l'Académie des Sciences de Paris. A cette époque la théorie de l'élasticité est une théorie très jeune - le mémoire de Navier, où l'auteur déduit les équations de l'équilibre élastique et les vibrations d'un corps solide, est communiqué à l'Académie des Sciences en 1821, publié en 1827 ; les trois mémoires de Cauchy, où le concept de « tension » est introduit et la déformation autour d'un point du corps solide est exprimée en fonction des six composantes de déformation, sont publiés en 1827-28 dans les volumes 2^{e} et 3^{e} des *Exercices de Mathématiques.* Cependant les points de vue de Navier et de Cauchy sont très différents et causent une dure polémique, bien décrite par Love dans l'Introduction de son traité classique[6]. D'autres mathématiciens comme Poisson, Clausius, Green . sont intervenus dans le débat, et ont introduit des idées et des théories nouvelles pour envisager la polémique et donner des réponses certaines ; sur ce sujet je renvoie aux livres[7].

9 Lamé et Clapeyron ne s'intéressent pas seulement à l'aspect théorique de la théorie de l'élasticité, mais aussi aux applications à la science de l'ingénieur. Ils expliquent très bien cette attitude dans leur mémoire :

> Les géomètres qui ont étudié la théorie de l'équilibre des corps solides, se sont bornés jusqu'ici à la recherche des relations qui doivent exister entre les forces qui leur sont appliquées, pour qu'elles se contrebalancent exactement. La nature de ces relations est indépendante de la constitution intime du corps ; elles résultent de ce que la distance relative des points d'application est supposée invariable. Mais cette manière d'envisager la question laisse dans une ignorance complète sur la loi suivant laquelle se transmet, d'un point à l'autre d'un corps solide, l'influence réciproque en vertu de laquelle l'action de l'une de forces est détruite par celle de toutes les autres. L'étude de ce phénomène est pourtant d'une grande importance, puisque nous voyons que, lorsque les forces qui se font équilibre acquièrent un degré suffisant d'intensité, le corps solide, après avoir changé de forme d'une manière plus ou moins sensible, finit par se briser.
>
> Les ingénieurs, dans la pratique de leur art, devant proportionner la force de leurs constructions aux efforts qu'elles doivent supporter, ont sans cesse à s'occuper de considérations de ce genre ; aussi ont-elles fixé depuis longtemps l'attention des géomètres, et la science s'est successivement enrichie de formules importantes sur la résistance des solides ; mais toutes celles qui sont parvenues à notre connaissance, fondées sur des hypothèses plus ou moins gratuites, et présentées comme l'expression empirique des expériences faites par leurs auteurs, occuperaient dans une théorie complète de l'équilibre des corps solides, la place qu'on pourrait assigner aux formule usitées sur le jaugeage des eaux courantes, parmi les lois générales de l'hydrostatique ; c'est-à-dire qu'elles seront long-temps utiles aux

gens de l'art, mais qu'une théorie rigoureuse doit leur servir de base[8]
.

10 Lamé et Clapeyron suivent en gros la méthode de Navier pour déduire les équations de l'équilibre élastique et montrent leur intégration dans quelques cas particuliers. Mais le mémoire contient aussi une partie tout à fait nouvelle, qui concerne l'application de ces équations à la résolution de quelques problèmes pratiques et le contrôle expérimental des résultats théoriques. En outre, des résultats nouveaux sont obtenus : l'énonciation du *problème de Lamé* (le problème de la déformation d'une sphère élastique pleine ou creuse, sollicitée par des forces quelconques sur la surface) que Lamé résoudra une vingtaine d'années après ; l'introduction de *l'ellipsoïde de Lamé* (qui est défini dans le mémoire de la manière suivante : « les pressions obliques exercées au point M. sur trois éléments plans quelconques perpendiculaires entre eux, représente en grandeur et en direction, trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde, ayant pour demi-diamètres toutes les pressions exercées autour du point M.[9] ») ; et enfin l'introduction du *coefficient élastique de Lamé.*

11 Les idées et les résultats contenus dans le mémoire de 1828, seront développés et généralisés dans les années suivantes dans plusieurs travaux et traités rédigés par Lamé à son retour de la Russie. En 1831 Lamé devient professeur de physique à l'École Polytechnique et en 1851 professeur de probabilité et physique mathématique à la Sorbonne. Pendant ces années il publie plusieurs traités contenant ses cours professés à l'Université. Son livre sur la théorie de l'élasticité est un *compendium* des recherches qu'il a conduit -seul ou avec son ami Clapeyron - pendant une vingtaine d'années. La leçon septième du premier volume de son *Cours de Physique de l'École Polytechnique*[10]est dédiée à la théorie de l'élasticité des corps solides, qui est présentée comme une théorie indispensable afin de mieux comprendre plusieurs phénomènes physiques (par ex. la lumière, la chaleur, l'électricité). Dans le mémoire qui établit l'équilibre du fluide éthéré[11] , Lamé utilise la théorie de l'élasticité pour déduire les lois qui régissent l'équilibre de l'éther et pour analyser la propagation de la lumière à travers l'espace. Il continue à s'intéresser à l'équilibre des corps solides dans un article de 1841, où les formules relatives aux trois tensions principales dans un corps en équilibre d'élasticité sont exprimées[12].

12 On peut affirmer que la théorie de l'élasticité est toujours présente dans l'œuvre de Lamé pendant sa longue carrière scientifique. Elle possède en fait un double rôle : elle est en même temps une théorie applicable à la science de l'ingénieur et une théorie qui peut bien expliquer la nature la plus profonde du monde physique.

« Le véritable roi de la nature physique »

13 Dans les années vingt, Augustin Fresnel *montre* que ses expériences d'interférences de la lumière polarisée peuvent être bien expliqués par la composition de vibrations transversales du fluide éthéré. Pour la plupart des savants ce fait constitue une preuve de l'existence de l'éther. Lamé est tout à fait convaincu que ce fluide - considéré élastique, homogène et isotrope - obéit aux lois de la théorie mathématique de l'élasticité servant à décrire la propagation des forces physiques dans l'espace. Dans son mémoire sur le principe général de la physique,[13] il remarque qu'après les expériences de Fresnel, les travaux de Hamilton et les recherches sur l'éther de Cauchy Mac-Cullagh et Neumann, « il n'est plus possible de mettre en doute l'existence de l'éther ».

14 C'est pour cette raison que la théorie de l'élasticité est considérée par Lamé comme fondamentale pour la compréhension du monde physique, et au sein du cadre plus large de la « philosophie naturelle ». En effet, dans son *Cours de Physique,* Lamé cherche une théorie unifiant l'électricité, la chaleur et la lumière sur la base des vibrations transversales ou longitudinales de l'éther. « La grande analogie qui existe entre les phénomènes de la lumière et ceux de la chaleur rayonnante, fait présumer qu'ils sont produits par un seul agent », Lamé note dans le 2e volume de son *Cours de Physique*[14]. Dans le 3e volume il considère aussi l'électricité : « La théorie physique de l'électricité se compose aujourd'hui de plusieurs groupes de faits ; chacun d'eux est assez bien défini par une hypothèse particulière ; mais quoique des phénomènes transitoires prouvent que ces groupes séparés ont une origine commune, on n'est pas encore parvenu à saisir l'hypothèse unique qui doit les embrasser tous[15] ». Dans d'autres articles publiés dans les *Annales de Chimie et Physique* en 1833 et 1834[16]—, il considère que le fluide éthéré était aussi le responsable des réactions chimiques et des changements d'état.

15 Sous ce point de vue l'éther occupe une position centrale en physique et par conséquent la théorie de l'élasticité, qui est la théorie la plus naturelle pour étudier les déformations de l'éther, est d'une importance vraiment considérable. Lamé parle encore, dans le Discours préliminaire à son *Cours dephysique mathématique rationnelle,* de l'existence de l'éther en soulignant son importance dans la science.

> La propagation de la lumière dans le vide et les espace planétaires, jointe au phénomène des interférences, signale incontestablement l'existence d'un fluide éthéré, second espèce de matière, infiniment plus étendue, plus universelle, et très probablement plus active que la matière pondérable. Partant de cette définition caractéristique, mon fatalisme est arrivé depuis longtemps à deux nouvelles conclusions : la première, que la science future reconnaîtra dans l'éther, le véritable roi de la nature physique que de vouloir le couronner dès aujourd'hui[17].

Paramètres différentiels et coordonnées curvilignes

16 Les recherches en théorie de l'élasticité conduisent Lamé à introduire des outils mathématiques qui ont montré leur efficacité dans plusieurs champs théoriques, en particulier les coordonnées curvilignes et les paramètres différentiels.

17 Lamé généralise les coordonnées cartésiennes usuelles en considérant un système de coordonnées, pas nécessairement rectilignes, mais qui restent orthogonales les unes aux autres. Elles peuvent être appliquées avec succès à la physique mathématique et à l'intégration des équations différentielles. Dans l'*Introduction à son traité sur les coordonnées curvilignes,* Lamé explique le lien entre les coordonnées curvilignes et la théorie de l'élasticité :

> Si l'hydrostatique et la théorie du potentiel ont introduit les familles des surfaces de niveau, la théorie de la chaleur celles des surfaces isothermes, la théorie de la lumière celles des surfaces d'ondes ; c'est la théorie mathématique de l'équilibre d'élasticité des corps solides, qui a introduit la considération de trois familles conjuguées et orthogonales.
>
> En effet : il résulte de cette théorie qu'en chaque point d'un solide en équilibre d'élasticité, il existe toujours trois éléments-plans rectangulaires, que les forces élastiques sollicitent normalement,

> tandis que tous les autres éléments, au même point, peuvent n'éprouver que les tractions ou des pressions obliques. Si donc on considère à la fois les trois éléments-plans sollicités normalement, qui correspondent à tous les points du solide, et dont les positions varient d'une manière continue, tous ces triples éléments pourront former, de proche en proche, trois familles de surfaces orthogonales, composant ce qu'on appelle un système isostatique, et qui jouissent de la propriété fondamentale d'être seules sollicitées normalement par les forces élastiques[18].

18 Et, dans son cours, Lamé ajoute qu'on peut trouver un peu étrange de fonder un cours de mathématiques sur la seule idée des systèmes des coordonnées. Mais il remarque alors que ce sont précisément ces systèmes qui caractérisent les étapes de la science, et cite comme exemple l'invention des coordonnées cartésiennes, sans lesquelles l'algèbre serait restée au temps de Diophante, ce qui ferait que ni le Calcul infinitésimal, ni la Mécanique analytique n'existeraient aujourd'hui.

19 Lamé utilise des coordonnées curvilignes convenables pour résoudre des problèmes d'ingénierie et de physique mathématique en général (élasticité, chaleur, etc.) Par exemple, dans la science du bâtiment, des problèmes liés à la stabilité des voûtes peuvent être résolus de manière plus simple en considérant des coordonnées curvilignes qui suivent le contour des voûtes.

20 Mais c'est dans le contexte de la physique mathématique que les coordonnées curvilignes montrent le mieux leur efficacité. Dans un article concernant la propagation de la chaleur dans les polyèdres[19], des coordonnées curvilignes adaptées à la forme géométrique des polyèdres permettent à Lamé d'étudier le problème en manière plus simple. Et il utilise le même système de coordonnées pour envisager des problèmes différents, mais qui engagent des figures ayant la forme de polyèdres.

21 Dans toutes ces applications de l'analyse physico-mathématique, les corps de forme polyédriques se présenteront à chaque pas ; soit quand on se proposera d'évaluer exactement les efforts supportés et les résistances offertes par les différentes parties d'une construction, soit quand on arrachera à l'analyse le secret de la double réfraction et de la polarisation, ou qu'on se proposera d'étudier les circonstances qui président à la formation des cristaux[20].

22 En manière similaire, en introduisant cette fois un système de coordonnés cylindriques, Lamé, dans une note de 1836[21], étudie et résout le problème de l'équilibre de température.

23 Finalement, afin d'établir les lois de la chaleur stationnaire dans un corps solide et homogène ayant un contour ellipsoïdal, Lamé considère l'équation de Laplace exprimée en coordonnées ellipsoïdales. Il trouve la formule (dite *équation de Lamé)* qui décrit le phénomène considéré. En outre, il déduit diverses solutions de cette équation, dites fonctions de Lamé. Ces fonctions ont le même rôle pour l'ellipsoïde que les fonctions sphériques pour la sphère. Je rappelle que Liouville, Heine et d'autres mathématiciens ont continué à étudier ce type de fonctions[22].

24 Vers la fin de son cours, Lamé remarque que la théorie de l'élasticité est le domaine où ses théories des coordonnés curvilignes peuvent mieux montrer son utilité : « Il résulte des leçons précédentes, que si l'idée des coordonnées curvilignes est venue de la théorie mathématique de l'élasticité, c'est aussi dans cette théorie, que le nouvel instrument conduit aux lois les plus complètes, et rencontre les plus grand nombre d'applications…[23] ».

25 La généralisation de plusieurs résultats de théorie de l'élasticité déduits par Lamé - et en particulier les équations de l'équilibre élastiques exprimées en coordonnés curvilignes - utilisent deux expressions que Lamé même avait déjà introduit dans un article de 1834, afin d'établir les équations d'équilibre de l'éther et qu'il avait appelé paramètres différentiels[24].

26 Ces expressions, très importantes en physique mathématique, sont définies de la manière suivante :

(1) $$\Delta_1 F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$ paramètre différent du premier ordre

(2) $$\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$ paramètre différent de second ordre

27 où *F* est une fonction des coordonnés cartésiennes orthogonales *x, y, z (F* suffisamment dérivable). Les paramètres différentiels sont très importants en physique mathématique, et notamment en théorie du potentiel. Lamé écrit que : « [le paramètre du second ordre est] une dérivée naturelle, plus essentielle, plus simple, et en même temps plus complète, que toutes les dérivées partielles, choisies plus ou moins arbitrairement, que l'on a l'habitude de considérer[25] ». En effet, la formule (2) égalée à zéro est l'équation de Laplace, qui a un rôle considérable dans diverses théories de la physique mathématique. Comme Lamé le remarque, la dilatation dans un corps solide en équilibre d'élasticité, la température en équilibre de chaleur, et le potentiel de l'attraction des sphéroïdes, sont des fonctions dont le paramètre différentiel du second ordre est nul.

28 Pour ce qui concerne le premier paramètre différentiel : « Si ce paramètre n'existe pas essentiellement, comme celui du second ordre, dans les équations de la physique mathématique, néanmoins son rôle naturel est tout aussi important[26] ». En effet, l'intensité d'une force *F* du à un potentiel *P* est donnée par le premier paramètre différentiel de P.

29 Une propriété remarquable de ces expressions, que Lamé ne manque pas de relever, est leur invariance pour changement de coordonnées.

30 Après l'introduction des coordonnées curvilignes, il généralise les paramètres différentiels à un système quelconque de coordonnées curvilignes, en remarquant encore une fois l'importance de ces expressions en physique mathématique. En particulier, Lamé utilise les paramètres différentiels en coordonnés curvilignes afin de généraliser à ces systèmes de coordonnées les équations de l'équilibre élastique pour un corps isotrope[27]. À noter que le paramètre différentiel du second ordre exprimé en coordonnées curvilignes orthogonales permet de se poser des questions plus générales en théorie du potentiel concernant des corps de formes diverses.

Influence des idées de Lamé

31 Carl Neumann [C. Neumann 1860] et Cari Wilhelm Borchardt [Borchardt 1873] ont beaucoup simplifié les calculs de Lamé qui conduisent aux équations générales de l'équilibre d'élasticité (d'un fluide homogène et isotrope) en coordonnées curvilignes, en développant une méthode plus simple. En effet ils utilisent le potentiel d'élasticité comme demandé par la « théorie continuiste » introduite par Green[28].

32 En 1882 Eugenio Beltrami trouve les équations générales de l'équilibre élastique dans un espace non euclidien (à courbure constante[29]). Il utilise une méthode différente de la procédure de Lamé et de celles de Neumann et Borchardt. En effet son point de départ est l'élément linéaire de l'espace considéré ; cependant il se réfère toujours aux résultats de Lamé. En particulier, il applique la théorie des paramètres différentiels de Lamé (généralisée aux espaces courbes) pour obtenir ses équations de l'équilibre élastique.

33 Beltrami généralise les paramètres différentiels à un système de deux coordonnées curvilignes (non nécessairement orthogonales) dans l'article « Ricerche di analisi applicata alla geometria[30]» en utilisant résultats et concepts contenus dans la théorie des surfaces de Gauss[31]. En 1868, juste après la publication du mémoire de Riemann sur les fondements de la géométrie[32], Beltrami considère une variété riemannienne à n dimensions et généralise l'équation de Laplace à cette variété. Pour ce faire, il utilise encore une fois la théorie des paramètres différentiels développée par Lamé. Beltrami obtient ainsi l'équation dite *de Laplace-Beltrami* dans un espace n-dimensionel à courbure non nulle[33]. Son but, que Beltrami va rechercher à atteindre dans plusieurs travaux successifs, est de généraliser la théorie du potentiel aux variétés riemanniennes.

34 Plus largement, Beltrami envisage un projet très large : il veut généraliser les théories fondamentales de la physique mathématique (mécanique, théorie du potentiel, théorie de l'élasticité, électricité, ...) à un espace non euclidien (plus en général à une variété riemannienne). En effet, suivant en cela l'idée de Lamé, Beltrami est convaincu qu'un fluide éthéré remplit l'univers et propage les phénomènes physiques dans l'espace à travers ses vibrations. On peut alors considérer ce fluide comme l'élément unificateur du monde physique, comme Lamé et d'autres savants de l'époque le postulent. Mais Beltrami va plus loin : il admet que l'éther peut remplir un espace non euclidien. À son avis, les phénomènes physiques sont les seuls qui peuvent nous montrer la véritable nature de l'espace.

35 Beltrami se propose alors de trouver quelles sont les vraies déformations de l'éther responsables de la propagation les forces électriques, magnétiques, de la lumière d'un point à l'autre de l'espace[34]. Il étudie aussi les tensions du fluide éthéré entre deux corps électrisés en interaction, tensions exprimées par Maxwell dans son *Treatise on Electricity and Magnetism*[35]. Beltrami montre qu'un fluide éthéré (supposé homogène, élastique et isotrope), dont les déformations donneraient le système de tensions proposé par Maxwell, ne peut exister, au moins dans un espace euclidien[36]. En conclusion de ses calculs, Beltrami suggère alors deux possibilités : ou le fluide éthéré possède des propriétés particulières (c'est-à-dire des propriétés qui n'appartiennent pas à des fluides élastiques usuels) qui peuvent expliquer les déformations déduites dans son article, ou l'éther remplit un espace qui n'est pas nécessairement euclidien.

36 Ce dernier cas est approfondi par Beltrami et par ses élèves Ernesto Padova, Ernesto Cesaro et Carlo Somigliana. Ils ne trouvent pas de réponses satisfaisantes aux questions posées dans les articles de Beltrami. En particulier, Padova montre que si l'espace possède une courbure constante négative, il ne peut y avoir de déformations pouvant propager les forces électromagnétiques dans l'espace[37]. Cependant, en étudiant les déformations de l'éther lorsqu'il propage des phénomènes physiques dans un espace euclidien ou non euclidien, ces mathématiciens ont déduit des résultats mathématiques intéressants - comme les équations de l'équilibre élastique dans un espace courbe, l'équation de Laplace-Beltrami, les équations de Beltrami-Michell, les formules de Somigliana.

Je remercie Bernard Maitte pour la correction de mon français.

NOTES

1. Lamé Gabriel, *Analyse des travaux de M. Lamé par lui-même, Paris, 1843*, p. 14

2. Clapeyron, Benoît Pierre et Lamé, Gabriel « Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes », *Mémoires présentés par divers savants étrangers*, vol. 4, 1828, pub. 1833, p. 465-562

3. Lamé, Gabriel, « Mémoire sur les lois de l'Equilibre de l'éther dans les corps diaphanes », *Annales de chimie et de physique*, vol. 55, 1833, p. 322-335 ; cit. p. 322-323

4. Bertrand, Joseph, *Eloge de Gabriel Lamé*, Paris : Bachelier, 1878, p. 19

5. Lamé, Gabriel, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris : Bachelier, 1852, p. 2

6. Love, A.E.H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity,* Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1906

7. Love, A.E.H., op. cit. ; Belhoste, Bruno, *Cauchy, 1789-1857 : un mathématicien légitimiste au XIXe siècle,* Paris : Belin, 1984

8. *op. cit.* n. 2, p. 465-466

9. *op. cit.* n. 2, p. 497

10. Lamé, Gabriel, *Cours de Physique de l'École Polytechnique* (3 vols.), Bruxelles : Meline, 1840, vol. I

11. Lamé, Gabriel, « Mémoire sur les lois de l'équilibre éthéré », *Journal de l'École Royale Polytechnique, vol. 14, 1834, p. 191-288*

12. Lamé, Gabriel, « Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité », *Journal des mathématiques pures et appliquées, vol.* 6, 1841, p. 37-60

13. Lamé, Gabriel, « Mémoire sur le principe général de la Physique », *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris, vol.*

14. *op. cit.* n. 10, vol. II, p. 104

15. *op. cit.* n. 10, vol. III, p. 1

16. *op. cit.* n. 3 ; Lamé, Gabriel, « Mémoire sur les vibrations lumineuses des milieux diaphanes », *Annales de chimie et de physique, vol.* 57, 1834, p. 211-219

17. Lamé, Gabriel, *Cours de physique mathématique rationnelle*, Paris, 1861, p. 13

18. Lamé, Gabriel, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications, Paris : Bachelier, 1859, p. VII

19. Lamé, Gabriel, « Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres, et principalement dans le prisme triangulaire régulier », *Journal de l'École R. Polytechnique, vol.* 14, 1833, p. 194-251

20. *op. cit.* n. 19, p. 194-195

21. Lamé, Gabriel, « Note sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique », *Journal de math. pures et appliquées, vol.* 1, 1836, p. 77-87

22. Lamé, Gabriel, « Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux », *Journal de math. pures et appliquées, vol.* 4, 1839, p. 126-183 ; Second mémoire…, id., p. 351-385

23. *op. cit.* n. 18, p. 367

24. *op. cit.* n. 11

25. *op. cit.* n. 18, p. 25

26. *op. cit.* n. 5, p. 28

27. *op. cit.* n. 18, Leçon XV

28. Voir Tazzioli, Rossana, *Beltrami e i matematici "relativisti",* Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, N. 47, Bologna : Pitagora, 2000

29. Beltrami, Eugenio, « Sulle equazioni generali dell'elasticità », 1882, in *Opere matematiche* (éd. par la Facoltà di Scienze della R.Università di Roma), 4 vols, Milano : Hoepli, 1902-1920, vol. III, p. 383-407 ; voir l'article Tazzioli, Rossana, « Ether and theory of elasticità in Beltrami's work », *Archive for History of Exact Sciences, vol.* 46, 1993, p. 1-37

30. Beltrami, Eugenio, « Ricerche di analisi applicata alla geometria », 1864-65, in *Opere*, vol. I, p. 107-198

31. Gauss, Carl Friedrich, *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* Göttingen, 1828

32. Riemann, Bernhard, « Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen », 1854, pub. 1868, in *Bernhard Riemann gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge* (éd. par R. Narasimhan, Springer , 1990), p. 304-319

33. Beltrami, Eugenio, « Sulla teorica generale dei parametri differenziali », 1868, in *Opere, vol.* II, p. 74-118

34. Voir les articles de Beltrami, Eugenio : *op. cit.* n. 29 ; « Considerazioni sopra una legge potenziale », 1876, in *Opere, vol.* III, p. 30-38 ; « Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità », 1884, in *Opere, vol.* IV, p. 136-179 ; « Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche », 1884, *Opere, vol.* IV, p. 95-103

35. Maxwell, James Clerk, *A treatise on Electricity and Magnetism,* 2 vols., Oxford, 1873

36. Beltrami, Eugenio, « Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell », 1886, in *Opere, vol.* IV, p. 190-223

37. Padova, Ernesto, « La teoria di Maxwell negli spazi curvi », *Atti della Reale Accademia dei Lincei,* s. 4, vol. 5, 1889, p. 875-880

AUTEUR

ROSSANA TAZZIOLI

UFR de Mathématiques – UMR Paul Painlevé – CHSE Université de Lille 1